TEORIA TERCER PARCIAL

RANGO Y NULIDAD.

Mm *ESPACIO NULO DE UNA MATRIZ* $N_A = \{x \in R^n : Ax = 0\}$

Def: *Espacio Nulo y Nulidad de una matriz:* N_A se llama el espacio nulo de A y $\nu(A) = \dim(N_A)$ se llama nulidad de A. Si N_A contiene solo al vector cero, entonces $\nu(A) = 0$

Teorema: Sea A un matriz de n x n. Entonces A es invertible si y solo si $\nu(A) = 0$

Mm **Def:** *Imagen de una matriz.* Sea A un matriz de m x n. Entonces la imagen de A, denotada por imagen A, está dada por.

$$Imagen\ (A) = \{y \in R^m : Ax = y\ para\ alguna\ x \in R^n\}$$

Teorema: Sea A una matriz de m x n. Entonces imagen de A es un subespacio de R^m

Def: *Rango de una matriz.* Sea A una matriz de m x n. Entonces el rango de A, denotado por $\rho(A)$, esta dado por

$$\rho(A) = \dim(Imagen\ A)$$

Mr **Def:** *Espacio de los renglones y espacio de las columnas de una matriz:* Si A es una matriz de m x n, sean $\{r_1, r_2 \dots, r_m\}$ los renglones de A y $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ las columnas de A. Entonces se define.

$$R_A = espacio\ de\ los\ renglones\ de\ A = gen\ \{r_1, r_2 \dots, r_m\}$$

Y

$$C_A = espacio\ de\ las\ columnas\ de\ A = gen\ \{c_1, c_2 \dots, c_n\}$$

Mn **Teorema:** Para cualquier matriz A, C_A= imagen A, es decir, la imagen de una matriz es igual al espacio de sus columnas.

Teorema: Si A es una matriz de m x n, entonces

$$\dim(R_A) = \dim(C_A) = \dim(Imagen\ A) = \rho(A)$$

Teorema: Si A es equivalente por renglones a B, entonces $R_A = R_B$, $\rho(A) = \rho(B)$ y $\nu(A) = \nu(B)$.

Teorema: El rango de una matriz es igual al número de pivotes en su forma escalonada por renglones.

Teorema: Sea A una matriz de mxn. Entonces:

$$\rho(A) + \nu(A) = n$$

Es decir, el rango de A mas nulidad de A es igual al número de columnas de A.

Teorema: Sea A una matriz de n x n. Entonces A es invertible si y solo si $\rho(A) = n$.

Teorema: El sistema $Ax = b$ tiene al menos una solución si y solo si $b \epsilon C_A$. Esto ocurrirá si y solo si A y la matriz aumentada $(A \vdots b)$ tiene el mismo rango.

ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO Y PROYECCIONES.

Def: Espacio con producto interno. Un espacio vectorial real V se llama espacio con producto interno si para cada par ordenado de vectores u y v en V, existen un número real único (u,v) llamado producto interno de u y v, tal que si u,v y w están en V y $\alpha \epsilon R$ entonces:

$i.-\ \langle v, v \rangle \geq 0$

$ii.-\ \langle u, u \rangle = 0 \ \ <=> \ \ u = 0$

$iii.-\ \langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$

$iv.-\ \langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

$v.-\ \langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

$vi.-\ \langle \alpha u, v \rangle = \langle u, \alpha v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$

Def: Sea V un espacio con producto interno y suponga que u y v están en V. Entonces:

$i.-u\ y\ v\ son\ ortogonales\ si\ \langle u, v \rangle = 0$

$ii.-La\ norma\ de\ u, denotada\ por\ \|u\| = \sqrt{\langle u, v \rangle}$

Def: Conjunto ortonormal. El conjunto de vectores$\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ es un conjunto en V si

$i.-\langle v_i, v_j\rangle = 0 \quad para \;\; i \neq j$

$ii.-\|u_i\| = \sqrt{\langle u_i, u_i\rangle} = 1$

Teorema: Cualquier conjunto finito de vectores ortogonales diferentes de cero en un espacio con producto interno es linealmente independiente.

Teorema: Cualquier conjunto finito linealmente independiente en un espacio con producto interno se puede convertir en un conjunto ortonormal mediante el proceso de Gram-Schmidt. En particular, cualquier espacio con producto interno tiene una base ortonormal.

BASES ORTONORMALES Y PROYECCIONES EN $\boldsymbol{R^n}$

Def: Conjunto ortonormal en R^n se dice que un conjunto de vectores $S = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ en R^n es un conjunto ortonormal si:

$$\begin{cases} u_i.u_j = 0 & si \;\; i \neq j \\ u_i.u_j = 1 & si \;\; i = j \end{cases}$$

Def: Longitud o norma de un vector. Si $v \epsilon R^n$, entonces la longitud o norma de v, denotada por $|v|$ esta dada por

$$\|u_i\| = \sqrt{\langle u_i, u_i\rangle}$$

TEOREMA: SEA H UN SUBESPACIO DE DIMENSION m DE R^n ENTONCES H TIENE UNA BASE ORTONORMAL.

Mw

PROCESO DE GRAM-SCHMIDT.

Hipótesis: Sea $S \doteq \{V_1, V_2, \dots, V_3\}$ una base de H

La base ORTONORMAL que buscamos la llamaremos $S' = \{U_1, U_2, \dots, U_M\}$ donde los vectores U cumple con lo siguientes pasos:

$$1. - U_1 = \frac{V_1}{\|V_1\|}$$

El primer vector tiene norma uno (1), ahora debemos proceder a hallar un vector perpendicular al primero para ello

$$2. - V_2{}' = V_2 - (U_1 . V_2)U_1$$

El vector $V_2{}'$ corresponde a un vector perpendicular a U_1, ahora se procede a que su norma sea unitaria.

$$3. - U_2 = \frac{V_2{}'}{\|V_2{}'\|}$$

Ahora el vector tiene norma 1, se procede a hallar los demás vectores restantes de la base con la condición de perpendicularidad a los otros que ya tenemos, para ello se sigue:

$$4. - V_{k+1}{}' = V_{k+1} - (V_{k+1} . U_1)U_1 - (V_{k+1} . U_2)U_2 - \cdots - \cdots - (V_{k+1} . U_k)U_k$$

El vector $V_{k+1}{}'$ es perpendicular a los vectores de $S' = \{U_1, U_2, \dots, U_k\}$

$$5. - U_{k+1} = \frac{V_{k+1}{}'}{\|V_{k+1}{}'\|}$$

Se sigue buscando los vectores de la base ortonormal hasta que k+1 =m

Def: *Proyección ortogonal*: Sea H un subespacio del espacio con producto interno V con una base ortonormal $s = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ si $v \in V$, entonces la proyección ortogonal de v sobre H denotada por $proy_H v$ esta dado por:

$$proy_H V = (v.u_1)u_1 + (v.u_2)u_2 + (v.u_3)u_3 + \cdots + (v.u_k)u_k$$

Def: *Complemento ortogonal.* Sea H un subespacio del espacio con producto interno V. Entonces el complemento ortogonal de H, denotado por:

$$H^{\perp} = \{x \in V : \langle u, h \rangle = 0\} \ para\ todo\ h \in H$$

Teorema: Si H es un subespacio de espacio con producto interno V, entonces

$i.-H^{\perp}\ es\ un\ subespacio\ de\ V.$

$ii.-H \cap H^{\perp} = \{0\}$

$iii.-\dim(H^{\perp}) = n - \dim(H)$

Teorema: *Teorema de proyección.* Sea H un subespacio de dimensión finita del espacio con producto interno V y suponga que $v \in V$. Entonces existe un par único de vectores h y p tales que $h \in H, p \in H^{\perp}$, y

$$v = h + p$$

Donde $h = proy_H v$ y $p = proy_{H^{\perp}} v$

Teorema: *Teorema de aproximación de la norma.* Sea H un subespacio de dimensión finita del espacio con producto interno V y sea v un vector en V. Entonces, en H, $proy_H v$ es la mejor aproximación a v en el siguiente sentido: si h es cualquier vector en H, entonces:

$$\|v - proy_H v\| < \|v - h\|$$

TRANSFORMACIONES LINEALES.

Def: *Transformación lineal.* Sean V y W espacios vectoriales reales. Una transformación lineal T de V en W es una función que asigna a cada vector $v \in V$ un vector único $Tv \in W$ y que satisface, para cada u y v en V y cada escalar α,

$$T(u + v) = Tu + Tv$$

Y

$$T(\alpha v) = \alpha Tv$$

PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES: IMAGEN Y NUCLEO.

Teorema: Sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Entonces para todos los vectores $u, v, v_1, v_2 \dots v_n$ en V y todos los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

$i. -T(0) = 0 \qquad obs: el\ primer\ 0\ es\ el\ vector\ nulo\ de\ V\ y\ el\ segundo\ de\ W$

$ii. -T(u - v) = Tu - Tv$

$iii. -T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 T v_1 + \alpha_2 T v_2 + \cdots + \alpha_n T v_n$

Teorema: Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con base $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Sean $w_1, w_2, \dots, w_n$, n vectores de W supongamos que $T_1\ y\ T_2$ son dos transformaciones lineales de V en W tal que $T_1(v_i) = T_2(v_i) = w_i$ entonces $T_1(v) = T_2(v)$ para cualquier $v \in V$ es decir $T_1 = T_2$

Teorema: Sea V un espacio vectorial de dimensión finita con base $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Sea W un espacio vectorial que contiene los vectores $w_1, w_2, \dots, w_n$. Entonces existe una transformación lineal única $T: V \to W$ tal que $T(v_i) = w_i$ para $i = 1,2, \dots, n$

Am **Def:** *Núcleo e Imagen de una transformación lineal*: Sea V y W dos espacio vectoriales y sea $T: V \to W$ una transformación lineal. Entonces:

$i. -El\ NUCLEO\ de\ T, denotado\ por\ nu(T), esta\ dado\ por$

$$nu(T) = \{v \in V: Tv = 0_w\}$$

$ii. -La\ IMAGEN\ de\ T, denotado\ por\ imagen(T), esta\ dado\ por$

$$Imagen(T) = \{w \in W:\ w = Tv\}\ para\ algun\ v \in V$$

Teorema: Si $T: V \to W$ es una transformación lineal, entonces

$i. -nu(T)\ es\ un\ subespacio\ de\ V$

$ii. -imagen(T) es\ un\ subespacio\ de\ W.$

h **Def:** *Nulidad y rango de una transformación lineal.* Si T es una transformación lineal de V en W, entonces se define

$$Nulidad\ de\ T = \nu(T) = \dim(nuT)$$

$$Rango\ de\ T = \rho(T) = \dim\ (imagenT)$$

REPRESENTACION MATRICIAL DE UNA TRANSFORMACION LINEAL

Teorema: Sea $T: R^n \to R^m$ una transformación lineal. Entonces existe una matriz única de m x n, A_T tal que

$$T(x) = A_T x \quad para\ toda\ x \in R^n$$

Teorema: Sea A_T la matriz de transformación correspondiente a la transformación lineal T. Entonces:

$i. -imagen(T) = imagen\ A = C_{A_T}$

$ii. - \rho(T) = \rho(A_T)$

$iii. -nu(T) = N_{A_T}$

$iv. - \nu(T) = \nu(A_T)$

AUTOVALORES Y AUTOVECTORES.

Def: *Autovalor y Autovector.* Sea A una matriz de n x n con componentes reales. El número λ real se llama Autovalor de A si existe un vector diferente de cero v en R^n tal que

$$Av = \lambda v$$

El vector v diferente de cero se llama Autovector correspondiente a λ.

OBSERVACION.

$Av = \lambda v \quad => \quad (A - \lambda I)v = 0$

Aplicando determinante y como v es diferente de cero

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

De esta manera se determinan los autovalores de A

Teorema: Sea A una matriz de n x n. Entonces λ es un valor propio de A si y solo si

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

Donde p(λ) se denomina polinomio característico de A.

Teorema: Sea λ un autovalor de la matriz A de n x n y sea $E_\lambda = \{v: Av = \lambda v\}$. Entonces E_λ es un subespacio de R^n

Def: *Espacio propio.* Sea λ un valor propio de A. El subespacio E_λ se llama espacio propio de A correspondiente al valor propio de λ.

Teorema: LOS VECTORES PROPIOS CORRESPONDIENTES A LOS VALORES PROPIOS DISTINTOS SON LI.

Def: *Multiplicidad geométrica.* Sea λ una autovalor de la matriz A; entonces la multiplicidad geométrica de λ es la dimensión del espacio propio correspondiente a λ, esto es:

$$Multiplicidad\ geometrica\ de\ \lambda = \dim(E_\lambda) = v(A - \lambda I)$$

Teorema. Sea λ un autovalor de A. entonces:

$$Multiplicidad\ geometrica\ de\ \lambda\ \leq multiplicidad\ algebraica\ de\ \lambda$$

Teorema: Sea A una matriz de n x n; entonces A tiene n vectores propios linealmente independientes si y solo si la multiplicidad geométrica de cada valor propio es igual a su multiplicidad algebraica. En particular, A tiene n vectores propios linealmente independientes si todos los valores propios son distintos.

MATRICES SEMEJANTES Y DIAGONALIZACION.

Def. *Matrices semejantes.* Se dice que dos matrices A y B de n x n son semejantes si existe una matriz invertible C de n x n tal que

$$B = C^{-1}AC$$

O

$$CB = AC$$

Teorema. Si A y B son matrices semejantes de n x n, entonces A y B tienen el mismo polinomio característico y, por lo tanto, tienen los mismos valores propios.

Def: *Matriz diagonalizable.* Una matriz A de n x n es diagonalizable si existe una matriz diagonal D tal que A es semejante a D

Corolario: Si la matriz de n x n, tiene n valores propios diferentes, entonces A es diagonalizable.

MATRICES SIMETRICAS Y DIAGONALIZACION ORTOGONAL.

Teorema: Si A es una matriz simétrica $A = A^t$ real de n x n. Entonces los autovalores de A son reales.

M

Teorema: Sea A una matriz simétrica real de n x n. Si λ_1 y λ_2 son valores propios diferentes con vectores propios reales correspondientes v_1 y v_2, entonces v_1 y v_2 son ortogonales.

Teorema: Sea A una matriz simétrica real de n x n. Entonces A tiene n vectores propios reales ortonormales.

M

Def: *Matriz diagonalizable ortogonalmente.* Se dice que una matriz A de n x n es diagonalizable ortogonalmente si existe una matriz ortogonal Q tal que

$$Q^t A Q = D$$

Donde $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ donde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ son autovalores de A.

$$Una\ matriz\ es\ ortgonal\ si\ A^{-1} = A^t$$

Teorema: Sea A una matriz real de n x n. Entonces A es diagonalizable ortogonalmente si y solo si A es simétrica.

M

PROCEDIMIENTO PARA ENCONTRAR UNA MATRIZ DIAGONALIZANTE.

$i.-Encuentre\ una\ base\ para\ cada\ espacio\ propio\ de\ A.$

$ii.-Encuentre\ una\ base\ ortonormal\ para\ cada\ espacio\ propio\ de\ A\ usando$

$el\ proceso\ de\ Gram-Schmidt.$

$iii.-Escriba\ la\ matriz\ diagonalizante\ como\ los\ vectores\ obtenido\ antes.$